Réduction des endomorphismes

13 décembre 2020

1. Sous espaces vectoriels stables
2. Éléments propres d'un endomorphisme
3. Diagonalisaion des endomorphismes et des matrices
4. Trigonalisation
5. Théorème de Cayley-Hamilton

1. Sous espaces vectoriels stables.

Définition 1.1

Soient E un espace vectoriel , et f un endomorphisme de E ($f \in \mathcal{L}(E)$).
Un sous espace vectoriel F, de E, est dit **stable par f si $f(F) \subset F$.**
c.à.d $\forall x \in F$ on a $\quad f(x) \in F$.

Proposition 1.2

Soient E un espace vectoriel de dimension n, et F un sous espace vectoriel de E tel que $dim(F) = p$.
et $f \in \mathcal{L}(E)$.
F est stable par f si, et seulement s'il existe une base B adaptée à F dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

où A est matrice de type (p, p), $\quad B$ matrice de type $(p, n-p)$ et C matrice de type $(n-p, n-p)$.

Proposition 1.3

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E un espace vectoriel de dimension n.
On suppose que $E = E_1 \oplus ... \oplus E_n$ où les E_i sont des sous espaces vectoriels de E.
Soit $B = B_1 \cup ... \cup B_n$ une base adaptée à cette décomposition.
Alors, les E_i sont stable par f si, et seulement si la matrice de f dans la base B est diagonale par blocs
c.à.d elle a la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & A_2 & .. & 0 \\ 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & .. & 0 & A_r \end{pmatrix},$$

Où A_i est matrice carrée d'ordre $n_i = dim(E_i)$ pour $i = 1....n$

Exemple

Soit $B = f\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit R_θ la rotation d'axe e_3 et d'ange θ,
R_θ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui laisse invariants les sous espace $F = vect(e_1, e_2)$ et $G = vect(e_3)$
et sa matrice dans la base canonique B est

$$M = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

2. Éléments propres d'un endomorphisme

2.1. Valeurs propres d'un endomorphisme.

Définition 2.1

Soit f un endomorphisme de E, et $\lambda \in \mathbb{K}$.
λ est une **valeur propre** de $f \iff \exists x \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = \lambda x$.
Un tel vecteur x s'appelle **vecteur propre** de f associé à λ.

Exemple 2.2

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (-y, x)$.
montrer que f n'admet pas de valeur propre.
(2) $E =$ l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$
On considère $D : E \to E$ telle que $D(f) = f'$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on définit la fonction $g_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g_\lambda(x) = e^{\lambda x}$.
On a $D(g_\lambda) = \lambda g_\lambda$
Donc λ est une valeur propre de D et la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$ est un vecteur propre associé.

Exemple 2.2

(3) $R_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la rotation d'axe e_3 et d'angle θ.
On a $R_\theta(e_3) = e_3$.
Donc e_3 est un vecteur propre de R_θ ; la valeur propre associée est 1.
(4) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

le réel $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est une valeur propre de A.
En effet :

$$A.\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha.\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.2

(5) Soit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

le complexe $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -1 + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est une valeur propre de B.

En effet :

$$B.\begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} = j.\begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}.$$

2.1. Valeurs propres d'un endomorphisme.

Proposition 2.3

E un espace vectoriel de dimension finie n.
Soit f un endomorphisme de E, et $\lambda \in \mathbb{K}$, et M une matrice carrée d'ordre n
λ est une **valeur propre** de $f \iff$ l'endomorphisme $f - \lambda I$ n' est pas injective.
λ est une **valeur propre** de la matrice $M \iff det(M - \lambda I_n) = 0$.
λ est une **valeur propre** de $f \iff det(f - \lambda I_d) = 0$.

2.2. Sous espaces propres

Définition 2.4

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E, et λ une valeur propre de f.
Le sous espace propre associé à λ est l'ensemble E_λ :

$$E_\lambda = \ker(f - \lambda I) = \{x \in E / f(x) = \lambda x\}$$

c'est l'ensemble des valeurs propres et 0.

Remarque 2.5

(1) Si λ est une valeur propre d'une matrice carrée M,
Le sous espace propre associé à λ est l'ensemble :
$E_\lambda = \ker(M - \lambda I) = \{x \in E / MX = \lambda X\}$
Où X vecteur colonne de x.
(2) Puisque, par définition, un vecteur propre est non nul, alors $dim(E_\lambda) \geqslant 1$.
(3) Si λ n'est pas valeur propre, $E_\lambda = \{0\}$.

2.3. Polynôme caractéristique

Définition 2.6

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme :

$$P_A(X) = det(A - X.I_n)$$

$(*)$ Le polynôme caractéristique de A se présente sous forme :

$$P_A(X) = (-1)^n.X^n + (-1)^{n-1} Tr(A) + ... + det(A)$$

$(*)$ $det(A - X.I_n) = (-1)^n det(X.I_n - A)$ $(*)$ Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$P_A(X) = (-1)^2.X^2 - Tr(A)X + det(A) = X^2 - (a+d) + (ad - bc).$$

Théorème et Définition 2.7

Soit f un endomorphisme sur E (un espace vectoriel de dimension finie n)
et A la matrice de f dans une base donnée B de E.
Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ est indépendant du choix de la base B de E.
On l'appelle **polynôme caractéristique de** f et on le note aussi : $P_f(X)$.

$$P_f(X) = P_A(X) = det(A - X.I_n)$$

Preuve :

Théorème 2.8

Les valeurs propres d'une matrice A (resp. un endomorphisme f) sont les racines de son polynôme caractéristique $P_A(X)$ (resp. $P_f(X)$).

$$\lambda \quad valeur \quad propre \quad de \quad A \qquad \Longleftrightarrow \qquad P_A(\lambda) = 0.$$

$$Sp(A) = \{valeurs \quad propres \quad de \quad A\} = \{racines \quad de \quad P_A(X)\}.$$

Remarque 2.9

(1) une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ou un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$) admet au plus n valeurs propres distinctes ou non.
(2) une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (ou un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$) admet exactement n valeurs propres distinctes ou non.

Exemple 2.10

(1) On considère l'endomorphisme f sur $\mathbb{R}^3$ défini par la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$Sp(A) = \{-3, -1, 3\}$

Exemple 2.10

(2) On considère l'endomorphisme f sur $\mathbb{R}^2$ défini par la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$P_A(X) = X^2 + 1$
Si $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors B n'a pas de valeurs propre.
Si $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ alors B admet deux valeurs propres : i et $-i$.

Remarque 2.11

Une valeur propre λ d'un endomorphisme f (ou d'une matrice A) est une racine du polynôme $P_f(X)$.
Elle peut être racine simple ou multiple,
L'ordre de multiplicité de λ est le plus grand entier m tel que $(X-\lambda)^m$ divise $P_f(X)$.
On note m_λ l'ordre de multiplicité de λ.

Théorème 2.12

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ ou E un e.v de dimension n.
Si λ d'un endomorphisme f (ou d'une matrice A) alors

$$1 \leqslant dim(E_\lambda) \leqslant m_\lambda.$$

Preuve :

Remarque 2.13

$(*)$ Si λ est une valeur propre simple (ou racine simple) alors E_λ est nécessairement une droite.

Remarque 2.13

($*$) Si λ est une valeur propre double (ou racine double), alors E_λ sera un plan.

Théorème 2.14

Soit f un endomorphisme de E. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_r$ r valeurs propres distinctes de f.
Alors les espaces propres associés $E_{\lambda_1}....E_{\lambda_r}$ sont en somme directe i.e.

$$E_{\lambda_1} + ... + E_{\lambda_r} = E_{\lambda_1} \oplus .... \oplus E_{\lambda_r}.$$

Corollaire 2.15

Soit f un endomorphisme de E (ou A une matrice carrée d'ordre n). Si le polynôme caractéristique $P_f(X)$ admet n racines distinctes, alors il existe une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de f.

$E = E_{\lambda_1} \oplus .... \oplus E_{\lambda_n}$, et $E_{\lambda_i} = vect(u_{\lambda_i})$ pour tout $i = 1...n$.

3. Diagonalisaion des endomorphismes et des matrices

3.1. C. N.S de diagonalisation.

Définition 3.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
(1) On dit qu'un endomorphisme f, de E, est **diagonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale (donc une base formé de vecteurs propres de f).

(2) On dit qu'une matrice A, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, est **diagonalisable** s'il est semblable à une matrice diagonale,
autrement dit l'endomorphisme canoniquement associé à A est diagonalisable.
A est diagonalisable $\iff$ $\exists P$ inversible telle que $P^{-1}.A.P$ est diagonale.

3.1. C. N.S de diagonalisation.

(3) Un polynôme P est dit scindé sur $\mathbb{K}$ s'il se décompose en produit de polynômes de degré 1 de $\mathbb{K}[X]$.

$$P(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} ... (X - \lambda_r)^{m_r}.$$

c.à.d toutes les racines de P sont dans $\mathbb{K}$. On dit que λ_i est racine d'ordre de multiplicité m_i.

Le polynôme $P(X) = (X - 1)^2(X + 3)$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
1 est une racine double (d'ordre de multiplicité 2).
-3 est une racine simple.
Le polynôme $P(X) = X^2 + 1$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$ mais elle est scindé dans $\mathbb{C}[X]$.

3.1. C. N.S de diagonalisation.

Théorème 3.2 (C.N.S de diagonalisation)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Un endomorphisme f de E (ou une matrice A carrée d'ordre n) est diagonalisable si, et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(1) Le polynôme caractéristique P est scindé dans $\mathbb{K}$, c.à.d

$$P(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} ... (X - \lambda_r)^{m_r}.$$

(2) Pour chaque racine λ_i d'ordre de multiplicité m_i de P on a :

$$dim(E_{\lambda_i}) = m_i.$$

Corollaire 3.3 (Une condition suffisante)

Soit f un endomorphisme sur E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Si le polynôme caractéristique P de f est scindé dans $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples,
alors f est diagonalisable.

En effet, dans ce cas $dim(E_{\lambda_i}) = 1$ pour tout $i = 1...r$

Corollaire 3.4

Une matrice carrée d'ordre n sur $\mathbb{K}$ ayant n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$ est f est diagonalisable.

1. Factoriser le polynôme caractéristique
$P_f(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i}$.
2. Trouver une base de chaque sous espace propre.

Exemple 3.5

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, on considère l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base B est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Exemple 3.6

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, on considère l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base B est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

3.2. Remarques.

Matrice non diagonalisable sur $\mathbb{C}$

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficient dans $\mathbb{C}$.
A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$ quand il existe au moins une valeur propre λ pour laquelle $dim(E_\lambda) < m_\lambda$.

Matrice non diagonalisable $\mathbb{R}$

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficient dans $\mathbb{R}$.
Si le polynôme $P_A(X)$ admet des racines complexes alors A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. mais il se peut que qu'elle le soit dans $\mathbb{C}$.

Exemple

On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -4 \\ 1 & 4 & 8 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix},$$

4. Trigonalisation

4.1. Trigonalisation

Rappel

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice carrée d'ordre n.
A est triangulaire supérieur $\iff$ $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$.
Les éléments situés en dessous de la diagonale principale sont nuls.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Définition 4.1

Un endomorphisme f de E est dit **trigonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est **triangulaire supérieure.**

Une matrice carrée A, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, est dite triangulaire supérieure s'il est semblable à une matrice triangulaire supérieure
c.à.d s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure.

4.1. Trigonalisation

Remarque 4.2

Si A est la matrice de l'endomorphisme f dans une base de E, alors A est **trigonalisable** $\iff$ f est **trigonalisable**.

les valeurs propres d'une matrice triangulaire supérieur (ou inférieur) sont les éléments de la diagonale.

Exercice

Montrer que toute matrice triangulaire inférieure T est trigonalisable.
On considère

$$P = \begin{pmatrix} 0 & .. & ... & 0 & 1 \\ . & .. & .. & .. & 0 \\ . & .. & 1 & .. & . \\ 0 & .. & .. & .. & . \\ 1 & 0 & .. & .. & 0 \end{pmatrix},$$

Vérifier que P est inversible et que $P^{-1}TP$ est triangulaire inférieure.

Théorème 4.3 (C.N.S de Trigonalisation)

Soit A une matrice de (ou f un endomorphisme de E).
A est **trigonalisable** $\iff$ $P_A(X)$ est **scindé** sur $\mathbb{K}$.
On a le même résultat pour les endomorphisme.

Exemple 4.4

On considère l'endomorphisme f sur $\mathbb{R}^2$ définie par la la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Matrice d'ordre 3

Matrice d'ordre 3 :

Soit f un endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ (ou A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).
Si $P_f(X)$ est scindé, trois cas se présentent :

Cas (1) : $P_f(X)$ admet 3 racines distinctes $\Longrightarrow$ f est diagonalisable.

Cas (2) : $P_f(X)$ admet deux racines distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

2-1. f est diagonalisable si $\begin{cases} \lambda_1 \quad est \quad simple \\ \lambda_2 \quad est \quad double \quad et \quad dim(E_{\lambda_2}) = 2 \end{cases}$

2-2. f non diagonalisable si $\begin{cases} \lambda_1 \quad est \quad simple \\ \lambda_2 \quad est \quad double \quad et \quad dim(E_{\lambda_2}) < 2 \end{cases}$

Cas (3) : $P_f(X)$ admet une racine triple λ et $f \neq \lambda I \Longrightarrow$ f n'est pas diagonalisable.

Exemple 4.5

On considère l'endomorphisme f de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

Exemple 4.6

On considère l'endomorphisme f de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -13 \\ -3 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Exemple 4.7

On considère l'endomorphisme f de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

Exemple 4.8

On considère l'endomorphisme f de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ défini par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 & -8 \\ 8 & 3 & -1 & -8 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

5. Théorème de Cayley-Hamilton

5.1. Théorème de Cayley-Hamilton

Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_p X^p$ un polynôme dans $\mathbb{K}[X]$.
Pour un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par $P(u)$ l'endomorphisme :

$$P(u) = a_0 Id_E + a_1 u + ... + a_p u^p$$

et par $P(A)$ la matrice :

$$P(A) = a_0 I_n + a_1 A + ... + a_p A^p$$

avec $u^p = uo...ou$ et $A^p = A...A$

Proposition 5.1

L'application $\mathbb{K}[X] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P(X) \mapsto P(A)$ est un morphisme d'algèbre c.à.d linéaire :
et $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X]$ on a $(PQ)(A) = P(X)q(A)$.

Définition 5.2

On dit qu'un polynôme $P(X)$ est un polynôme annulateur de la matrice A ou de l'endomorphisme u
si $P(A) = 0$, ou si $P(u) = 0$

Exemple 5.3

(1) Soit $u : E \to E$ une projection c.à.d $u^2 = u$.
le polynôme $P(X) = X^2 - X$ est un polynôme annulateur de u.
(2) Soit $R : E \to E$ telle que $R^2 = I_d$, R est appelée **réflexion**.
le polynôme $P(X) = X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de R.

Cherchons les valeurs propres, connaissant un polynôme annulateur mais ne connaissant pas le polynôme caractéristique.

Proposition 5.4

Si P est un polynôme annulateur de u, respectivement de A, alors :

$$Sp(u) \subset \{racines \quad de \quad P\}$$

$$Sp(A) \subset \{racines \quad de \quad P\}$$

Preuve :

Théorème de Cayley-Hamilton 5.4

Soit u un endomorphisme sur un $\mathbb{K}$- espace vectoriel E et $dim(E) = n$.
Alors,

$$P_u(u) = 0$$

de même

$$P_A(A) = 0$$

c.à.d $P_A(X)$ est un polynôme annulateur de A,
($P_u(X)$ est un polynôme annulateur de u.)

Exemple 5.5

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & 1 & 0 \\ . & . & . & . & 1 \\ 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix},$$

Le polynôme caractéristique de N est $P_N(X) = X^n$
donc $N^n = 0$

Proposition 5.6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si A est inversilble alors
A^{-1} est combinaison linéaire de $I_n, A....A^{n-1}$
c.à.d il existe $\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}$ tel que

$$A^{-1} = \alpha_0.I_n + \alpha_1.A.... + \alpha_{n-1}.A^{n-1}.$$

Exemple 5.7

(1) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix},$$

$P_A(X) = -X^3 + 12X + 16$

5.2. Polynôme minimal

Définition 5.8

Soit u un endomorphisme de E ($dim(E) = n$).
Le polynôme minimal de u est un polynôme unitaire, noté m_u, vérifiant :
$(*)$ m_u annule u
$(*)$ P annule u (c.à.d $p(u) = 0$) $\Longrightarrow$ m_u divise P.

En particulier, m_u divise $P_u(X)$ le polynôme caractéristique de u.
Le polynôme minimal de u est un polynôme annulateur de u, non nul, de degré minimal.

Propisition 5.8

Soit u un endomorphisme de E ($dim(E) = n$).
Les valeurs propres de u sont exactement les racine de m_u, polynôme minima de u.

$$Sp(u) = \{racines \quad de \quad m_u\}$$

Preuve :

Théorème 5.9

Soit u un endomorphisme de E ($dim(E) = n$), et P,Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux.
Alors on a :

$$\ker(PQ)(u) = \ker(P)(u) \oplus \ker(Q)(u).$$

Preuve :

Théorème 5.10

Soit f un endomorphisme de E ($dim(E) = n$) (ou A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).
On suppose que le polynôme caractéristique est scindé :

$$P_f(X) = (-1)^p(X - \lambda_1)^{m_1}....(X - \lambda_p)^{m_p}$$

où $m_1, ...m_p \geqslant 1$ et $\lambda_1, ...\lambda_p \in \mathbb{K}$ sont deux à deux distincts,
alors, le polynôme minimal est

$$m_f(X) = (X - \lambda_1)^{\alpha_1}....(X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$

où $1 \leqslant \alpha_i \leqslant m_i$ pour tout $i = 1...p$.

Preuve :

Théorème 5.11

Soit f un endomorphisme de E ($dim(E) = n$) (ou A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).
Soit $m_f(X)$ son polynôme minimal.
F est diagonalisable **si, et seulement si** les racines de $m_f(X)$ sont toutes simples.

Preuve :

Exemples 5.12

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

Le polynôme caractéristique $P_f(X) = -X(X-1)(X-2)$

Exemples 5.13

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Le polynôme caractéristique $P_A(X) = -(X-2)^2(X-1)$
donc le polynôme minimal est

Exemples 5.14

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Le polynôme caractéristique $P_A(X) = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$ donc le polynôme minimal est

Exemples 5.14

Reprenons l'exemple où

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

Le polynôme caractéristique $P_B(X) = -(X+1)^2(X-1)$
donc le polynôme minimal est
soit $m_B(X) = (X+1)(X-1)$ ou soit $m_B(X) = (X+1)^2(X-1)$
Puisque $(B+I)(B-I) \neq 0$ et $m_B(B) = 0$
Donc $m_B(X) = (X+1)^2(X-1)$ qui n'admet pas des racines simples
Alors B n'est pas diagonalisable.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION